

- 1) **Działaniem wewnętrznym** w zbiorze $A \neq \emptyset$ nazywamy każde odwzorowanie $h: A \rightarrow A$.
- 2) Jeżeli $\circ$ jest działaniem wewnętrznym w $A \neq \emptyset$, to:
 - a) jest **łączne** $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A: (x \circ y) \circ z = z \circ (y \circ z)$
 - b) jest **przemienne** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A: x \circ y = y \circ x$
 - c) $e \in A$ nazywamy **elementem neutralnym** działania $\circ$ $\Leftrightarrow \forall x \in A: x \circ e = e \circ x = x$. Jeżeli w zbiorze A istnieje element neutralny, to jest on jedyny.
- 3) Jeżeli istnieje element neutralny $e \in A$ działania $\circ$ określonego w A , to **elementem odwrotnym** do elementu $x \in A$ nazywamy element $x' \in A$ taki, że
$$x \circ x' = x' \circ x = e.$$
- 4) Jeżeli działanie $\circ$ jest łączne w A i $e \in A$ jest elementem neutralnym tego działania, to jeżeli $x \in A$ posiada element symetryczny $x' \in A$, to jest on jedyny oraz $(x')' = x$.
- 5) Parę $(A, \circ)$, gdzie $\circ$ jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $A \neq \emptyset$, nazywamy **grupą** jeżeli działanie $\circ$ jest łączne, w zbiorze A istnieje element neutralny oraz dla każdego elementu $x \in A$ istnieje element do niego symetryczny. Jeżeli dodatkowo działanie $\circ$ jest przemienne, to $(A, \circ)$ nazywamy grupą przemenną lub abelową.
- 6) Trójkę $(P, \circ, \star)$, gdzie $\circ, \star$ są działaniami wewnętrznymi w P nazywamy **pierścieniem**, jeżeli spełnione są warunki:
 - a) $(P, \circ)$ - grupa abelowa, gdzie przez $\mathbf{0}$ oznaczamy element neutralny $\circ$
 - b) $\forall x, y, z \in P: (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ - łączność działania $\star$
 - c) $\forall x, y, z \in P: (x \circ y) \star z = (x \star z) \circ (y \star z) \quad \wedge \quad x \star (y \circ z) = (x \star y) \circ (x \star z)$ - rozdzielność $\star$ względem $\circ$.
- 7) Ponadto jeżeli zachodzi:
 - a) $\forall x, y \in P: x \star y = y \star x$ - przemienność $\star$, to P nazywamy pierścieniem przemennym.
 - b) w P istnieje $\mathbf{1}$ - element neutralny działania $\star$, tzw. jedynka pierścienia, to P nazywamy pierścieniem z jednością.
 - c) Jeżeli $x, y \in P \setminus \{\mathbf{0}\}$ oraz $x \star y = \mathbf{0}$, to elementy x i y nazywamy **dzielnikami zera**. Pierścień przemienny, z jednością i bez dzielników zera nazywamy **pierścieniem całkowitym**.
- 8) Pierścień z jednością $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ nazywamy **ciałem**, jeżeli dla każdego elementu $x \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}$ istnieje element symetryczny względem działania multiplikatywnego " $\cdot$ ". Jeżeli ponadto działanie " $\cdot$ " jest przemienne, to ciało nazywamy **ciałem przemennym**.
- 9) Odwzorowanie $h: G_1 \rightarrow G_2$ nazywamy **homomorfizmem** grupy $(G_1, \star)$ w grupę $(G_2, \circ)$, jeżeli $\forall x, y \in G_1: h(x \star y) = h(x) \circ h(y)$. Jeżeli homomorfizm jest bijekcją to nazywamy go **izomorfizmem**.
- 10) Odwzorowanie $h: P_1 \rightarrow P_2$ nazywamy **homomorfizmem pierścienia (ciała)** $(P_1, +, \cdot)$ w pierścień (ciało) $(P_2, \oplus, \odot)$ jeżeli:
 - a) $\forall x, y \in P_1: h(x + y) = h(x) \oplus h(y)$
 - b) $\forall x, y \in P_1: h(x \cdot y) = h(x) \odot h(y)$

Jeżeli h dodatkowo jest bijekcją, to h jest **izomorfizmem pierścieni (ciał)**.

Zadanie 1. Sprawdź, czy para $(A, \star)$ jest grupą. Jeśli tak, sprawdź, czy jest grupą abelową.

- $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$, gdzie $a \cdot_5 b$ to reszta z dzielenia $a \cdot b$ przez 5,
- $(\mathbb{Z}_4, +_4)$, gdzie $a +_4 b$ to reszta z dzielenia $a + b$ przez 4,
- $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ oraz $a \star b = ab - a - b + 2$,
- $A = \mathbb{R}^2$ oraz $(a, b) \star (x, y) = (ax - by, ay + bx)$,
- $A = \{x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ oraz $a \star b = a + b$,
- $A = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$, gdzie $f_0(x) = x, f_1(x) = -x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = -\frac{1}{x}$ oraz $\star$ jest składaniem funkcji,
- $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg } z \in \{\frac{k\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}\}$ oraz $\star$ jest dodawaniem liczb zespolonych,
- $A = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k \vee x = 3k\}$ oraz $a \star b = a + b$,
- $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = 0 \wedge \text{Im } z \neq 0\}$ oraz $z \star w = izw$.

Zadanie 2. Sprawdź, czy poniższe struktury stanowią grupę (abelową):

- $([-1, 1], \star)$, jeśli $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$,
- $((-1, 1), \star)$, gdzie działanie $\star$ jest określone jak wyżej,
- $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$, gdzie $\cdot$ oznacza mnożenie liczb zespolonych,
- $(\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}, \cdot)$, gdzie $\cdot$ oznacza mnożenie liczb zespolonych,
- $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \circ)$, gdzie $z \circ w = |z|w$.

Zadanie 3. Określ liczbę inwersji oraz znak poniższych permutacji:

- $\sigma_1 = (4, 5, 2, 1, 3)$,
- $\sigma_2 = (3, 5, 2, 4, 1)$,
- $\sigma_3 = (5, 2, 4, 3, 1)$.

Rozłóż powyższe permutacje na transpozycje. Wyznacz $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_3, \sigma_2 \circ \sigma_1, \sigma_3^{-1} \circ \sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}$.

Zadanie 4. Dobierz $i, j, k \in \{1, \dots, 8\}$ tak, aby wyrażenie

$$a_{14}a_{62}a_{5i}a_{85}a_{2k}a_{38}a_{47}a_{7j}$$

wchodziło w skład sumy określającej wyznacznik 8 stopnia ze znakiem plus.

Zadanie 5. Jaką strukturę stanowi zbiór A wraz z podanymi działaniami?

- $A = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ z dodawaniem i mnożeniem,
- $A = \mathbb{R}^2$, $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \odot (c, d) = (ac, ad + b)$,
- A - zbiór funkcji postaci $f(x) = ax + b$ dla $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ z działaniami dodawania i składania funkcji.

Zadanie 6. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ określamy następujące działania:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

Wykaż, że struktura $(\mathbb{Q}^2, \oplus, \odot)$ jest ciałem. Czy struktura $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ jest ciałem?

Zadanie 7. Rozważmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $f(x) = 2x + 1$ oraz grupy $(\mathbb{R}, \diamond)$, $(\mathbb{R}, \star)$, gdzie $x \diamond y = x + y + 2$, $x \star y = x + y - 5$. Czy odwzorowanie f jest homomorfizmem między tymi grupami? Jeśli tak, to czy jest to izomorfizm? Jeśli nie, wskaż izomorfizm między tymi grupami.

Zadanie 8. Niech $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Sprawdź, czy struktura $(A, \circ)$ jest grupą, jeśli $x \circ y = x + y - xy$. Jeśli tak, sprawdź czy odwzorowanie $f : A \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ jest homomorfizmem grupy $(A, \circ)$ w grupę $(\mathbb{R}, +)$?

Zadanie 9.

- a) Niech $(G, \cdot)$ oraz $(H, \odot)$ będą grupami, a e_G, e_H ich elementami neutralnymi. Udowodnij, że jeśli $f : G \rightarrow H$ jest homomorfizmem, to $f(e_G) = e_H$.
- b) Wykaż, że w dowolnej grupie $(G, \star)$ równość $a^2 = a$ (gdzie $a^2 = a \star a$) zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy a jest elementem neutralnym grupy G .
- c) Dla dowolnego pierścienia całkowitego $(P, \oplus, \odot)$ oraz elementu $a \in P$ udowodnij, że:

$$a^3 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ gdzie } a^3 = a \odot a \odot a.$$

Zadanie 10.

- a) Niech $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Udowodnij, że struktura $(X, \star)$ jest grupą, jeśli działanie $\star$ określone jest następująco:

$$(a, b) \star (c, d) = (bc + a, bd).$$

- b) Dane jest odwzorowanie $f : X \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takie, że $f(x, y) = y$. Udowodnij, że f jest homomorfizmem grupy $(X, \star)$ w grupę $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Czy jest to izomorfizm?